Содержание

Введение

Функциональный анализ является одним из важнейших разделов современного математического анализа. Он находит применение в математической физике, теории функций, дифференциальных и интегральных уравнениях, численном анализе, теории вероятностей, квантовой механике, математической экономике и ряде других областей.

Данный сборник содержит задачи, подобранные в соответствии с программой курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов специальности 1-31 03 01-02 − «Математика (научно-педагогическая деятельность)». В нем представлены задачи по разделам «Линейные ограниченные операторы и функционалы в нормированных пространствах», «Гильбертовы пространства» и «Интегральные уравнения». При составлении сборника использовались материалы из [3]. Предлагаемое пособие направлено на закрепление теоретического материала путем самостоятельного решения задач, а также на овладение основными приемами и методами решения задач по функциональному анализу.

Сборник предназначен в первую очередь для проведения лабораторных и практических занятий по курсу «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Подбор задач осуществлен в соответствии с расположением учебного материала в программе дисциплины. Материал разбит на темы, по каждой из которых учебным планом по дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов специальности 1-31 03 01-02 − «Математика (научно-педагогическая деятельность)» предусмотрено выполнение лабораторной работы. Для каждого типового задания подобрано 10 вариантов задач примерно одинаковой сложности. Это позволит также использовать сборник для самоконтроля при подготовке к экзамену. Самостоятельное решение задач по функциональному анализу часто вызывает большие трудности у студентов, поэтому пособие содержит примеры решения типовых задач.

1 Линейные ограниченные операторы и функционалы в нормированных пространствах

Тема 1
Линейные ограниченные функционалы

1.1.1 Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве c_0, выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал. В случае положительного ответа, найти его норму (таблица 1.1.1).

Таблица 1.1.1

Вариант	$F(x)$
1	$\sum_{k=1}^{\infty} e^k x(k) \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k(k-1)}$
2	$x(5) - 2x(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3} x(k)$
3	$x(3) - x(1) + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\sqrt{k}} x(k)$
4	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k!}{k^k} x(k)$
5	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{2^k}$
6	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k}{(k+1)!} x(2k)$
7	$x(10) - 3x(5) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} x(k)$
8	$\sum_{k=1}^{\infty} e^k \left(\frac{x(3k)}{2^{4k}} \right)$
9	$x(5) - 2x(1) + \sum_{k=1}^{50} \frac{\ln k}{k} x(k)$
10	$x(1) - \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k(k-1)}$

1.1.2 Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве l_p, выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал. В случае положительного ответа, найти его норму (таблица 1.1.2).

Таблица 1.1.2

Вариант	p	$F(x)$
1	1	$x(3)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(3k)}{k}$
2	2	$\sum_{k=1}^{100}e\cdot k!x(3k)-3x(3)$
3	3	$3x(2)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(5k)}{k+1}$
4	7/4	$x(100)-x(1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(2k)}{k!e^k}$
5	3	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(2k)}{2k}-3x(1)$
6	5/4	$x(3)-x(1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(2k)}{k!}$
7	2	$\sum_{k=1}^{10}\sin^2 x(3k)-3x(3)$
8	4	$\sum_{k=1}^{100}k!x(3k)-3x(1)$
9	1	$\sum_{k=1}^{\infty}x(k^2)-3x(1)+x(5)$
10	3	$x(3)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x(8k)}{k^2}$

1.1.3 Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве $L_p[a;b]$, выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал. В случае положительного ответа найти его норму (таблица 1.1.3).

Таблица 1.1.3

Вариант	p	a	b	$F(x)$
1	9/2	-1	1	$\int_0^1 t^4 x(t^3)dt$
2	1	3	9	$\int_9^{81} \sin \pi s \cdot x(\sqrt{s})ds$
3	9	0	2	$\int_0^1 \sqrt{t} x(t^2)dt$
4	6/5	-1	1	$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{s} \cdot x(\sqrt[3]{s})ds$
5	1	0	1	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{s}} x(s^2)ds$
6	2	-1	1	$\int_0^{1/2} t^{2/3} x(t^3)dt$
7	2	-1	1	$\int_0^1 t^{2/3} x(t^3)dt$
8	7	0	2	$\int_0^1 \sqrt{t} x(t^2)dt$
9	9/5	-1	1	$\int_0^1 \sqrt[3]{s} \cdot x(\sqrt[11]{s})ds$
10	5/4	0	1	$\int_0^1 \sqrt{t} x(t^3)dt$

1.1.4 Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве $C[a;b]$, выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал. В случае положительного ответа найти его норму (таблица 1.1.4).

Таблица1.1.4

Вариант	a	b	$F(x)$
1	0	4	$x(1)-\int_0^2 x(t^2)dt$
2	-1	3	$-3x(0)+\int_{-1}^2 tx(t)dt+\frac{1}{2}x(2)$
3	0	5	$\int_1^4 (t^2-2t-1)x(t)dt-2x(2)+x(9/2)$
4	-3	3	$x(0)-3\int_{-2}^2 (t+1)x(t)dt$
5	-2	2	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t\cdot x(t)dt+2x(-1)-4x(3/2)$
6	0	1	$3x(-2)-2x(0)+\int_0^{1/3} tx(t^2)dt$
7	-1	1	$3x(-\frac{1}{2})-2x(0)+\int_0^1 tx(t^2)dt$
8	-2	1	$x(1)+x(-2)-\int_{-2}^1 x\left(\frac{t^2}{4}\right)dt$
9	-4	1	$x(-2)-3\int_{-2}^2 (t+1)x(t)dt$
10	1	3	$\int_1^2 (t^2-2t-1)x(t)dt-2x(2)$

1.1.5 Пусть $X\in Ban$. Задает ли данная формула линейный ограниченный функционал $f:X\to K$? В случае положительного ответа найти его норму (таблица 1.1.5).

Таблица 1.1.5

Вариант	X	K	f
1	c	□	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x(n)$
2	l_∞	□	$f(x)=x(1)+x(3)$
3	c	□	$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}x(k)$
4	c	□	$f(x)=x(1)+\lim\limits_{n\to\infty} x(n)$
5	$C^{(2)}[0;1]$	□	$f(x)=ix(0)+x''(1)$
6	$L_1[2;4]$	□	$f(x)=\int\limits_2^4 t^2x(t^2)dt$
7	$L_2[0;1]$	□	$f(x)=i\int\limits_2^4 t^{-3/2}x(\sqrt{t})dt$
8	l_1	□	$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} ix(4k+1)$
9	$L_4[2;4]$	□	$f(x)=\int\limits_2^4 t^2x(t^3)dt$
10	$C^{(1)}[0;1]$	□	$f(x)=ix(0)+2x'(1)$

Примеры решения типовых задач

1 Используя теоремы об общем виде линейных ограниченных функционалов в различных пространствах, выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал. В случае положительного ответа найти его норму.

Пример 1 $f: c_0 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x(20) + 8x(3) - 3x(100)$.

Решение По теореме об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве c_0, $\forall f \in (c_0)'$ существует единственный вектор $y \in l_1$, такой, что $\forall x \in c_0$ выполняется равенство $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$. Обратно: если выполняется это равенство, то $f \in (c_0)'$, причем $\|f\| = \|y\|_1$. Рассмотрим вектор $y = (y(k))$, у которого $y(20) = 3$, $y(3) = 8$, $y(100) = -3$, а остальные координаты равны нулю. Тогда $y \in l_1$, и для этого вектора $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$. В силу указанной теоремы, f является линейным ограниченным функционалом в c_0, и

$$\|f\| = \|y\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)| = 3 + 8 + |-3| = 14.$$

Пример 2 $f: c_0 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(5) - 2x(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k} x(k)$.

Решение Рассмотрим вектор

$$y = \left(-2 + \frac{\ln 1}{1}; \frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 3}{3}; \frac{\ln 4}{4}; \frac{\ln 5}{5} + 1; \frac{\ln 6}{6}; \ldots \right).$$

Для этого вектора выполняется равенство $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$. Но $y \notin l_1$ (почему?). Значит, в силу теоремы об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве c_0, f не является линейным ограниченным функционалом.

Пример 3 $f: l_1 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{(2k)!} - 2x(1)$.

Решение По теореме об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве l_1, для любого $f \in (l_1)'$ существует единственный вектор $y \in l_\infty$, такой, что выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k),$$

и обратно. При этом $\|f\| = \|y\|_\infty$. Рассмотрим вектор $y = (-2;\ \frac{1}{2!};\ 0;\ \frac{1}{4!};\ 0;\ \frac{1}{6!};\ 0;...)$, для которого $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$. Так как $y \in l_\infty$, то f является линейным ограниченным функционалом, причем $\|f\| = \|y\|_\infty = \sup_k |y(k)| = 2$.

Пример 4 $f : l_3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(8k)}{k} - 2x(5) + x(6)$.

Решение По теореме об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве l_p, для любого $f \in (l_p)'$ существует единственный вектор $y \in l_q$ $\left(p^{-1} + q^{-1} = 1\right)$, такой, что $\forall x \in l_p$ выполняется равенство $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$, и обратно. При этом $\|f\| = \|y\|_q$. В данном случае $p = 3$, а поэтому $q = 3/2$. Рассмотрим вектор $(y(k))$, такой что $y(8k) = 1/k, y(5) = -2, y(6) = 1$, а остальные $y(k) = 0$. Для этого вектора $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$. Так как $y \in l_{3/2}$, то f является линейным ограниченным функционалом, причем

$$\|f\| = \|y\|_{3/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^{3/2}\right)^{2/3} = \left(1 + 2\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}\right)^{2/3}.$$

Пример 5 $f : L_{7/4}[0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{1/2} \sqrt{t} \cdot x(t^2)dt$.

Решение По теореме об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве $L_p[a;b]$ при $1 < p < +\infty$, для любого $f \in (L_p[a;b])'$ существует единственный вектор $y \in L_q[a;b]$ $\left(p^{-1} + q^{-1} = 1\right)$, такой, что $\forall x \in L_p[a;b]$ выполняется равенство

$f(x)=\int\limits_{[a;b]} x(t)y(t)dt$,и обратно. При этом $\|f\|=\|y\|_q$. В данном случае $p=7/4$, тогда $q=7/3$. Преобразуем интеграл

$$f(x)=\int_0^{1/2}\sqrt{t}\cdot x(t^2)dt=\begin{bmatrix} t^2=s, t=\sqrt{s}, \\ dt=\dfrac{ds}{2\sqrt{s}}, \\ s\in[0;1/4] \end{bmatrix}=\int_0^{1/4} s^{1/4}x(s)\frac{ds}{2\sqrt{s}}=\int_0^{1/4}1/2s^{-1/4}x(s)ds.$$

Функция

$$y(s)=\begin{cases} 1/2s^{-1/4}, 0\le s\le 1/4, \\ 0, 1/4<s\le 1 \end{cases}$$

принадлежит $L_{7/3}[0;1]$, так как функция $(s^{-1/4})^{7/3}=s^{-7/12}$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0;1]$. Отсюда, в силу указанной теоремы, f является линейным ограниченным функционалом, причем

$$\|f\|=\|y\|_{7/3}=\frac{1}{2}\left(\int_0^{1/4}s^{-7/2}ds\right)^{3/7}=\frac{1}{2^{13/14}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{3/7}.$$

Примечание Пространство $(L_1[a;b])'$ изометрически изоморфно пространству $L_\infty[a;b]$, состоящему из существенно ограниченных функций (функция $f(x)$ называется *существенно ограниченной* на отрезке $[a;b]$, если $\exists c\in\mathbb{R}:|f(x)|\le c$ почти всюду на $[a;b]$). Норма в пространстве $L_\infty[a;b]$ задается следующим образом:

$\|f\|=\inf\{c\in\mathbb{R} \mid |f(x)|\le c$ п.в. на $[a;b]\}$.

При этом теорема об общем виде линейного функционала в $L_1[a;b]$ имеет тот же вид, что и в $L_p[a;b]$ при $p>1$, если взять $q=\infty$.

Пример 6 $f:C[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_0^{2/3}x(\sqrt{t})dt-x(1/2)+2x(2/3)$.

Решение По теореме об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве $C[a;b]$, для любого $f\in(C[a;b])'$ существует единственная функция $g\in V[a;b]$, такая, что $g(a)=0$ и $\forall x\in C[a;b]$ выполняется равенство $f(x)=\int\limits_a^b x(t)dg(t)$, и обратно, причем $\|f\| = V_a^b[g]$. Подберем функцию g так, чтобы $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dg(t)$ $\forall x \in C[0;1]$. При этом мы будем пользоваться следующей формулой:

$$\int\limits_a^b x(t)dg(t) = \int\limits_a^b x(t)g'(t)dt + \sum_{k=1}^n x(t_k)h_k, \tag{1}$$

которая справедлива, если g – кусочно-непрерывно дифференцируемая функция, имеющая на $[a;b]$ точки разрыва t_k со скачками h_k соответственно.Преобразуем $f(x)$, выполнив в интеграле замену $\sqrt{t} = s$. Тогда

$$f(x) = \int\limits_0^{\sqrt{2/3}} x(s)2sds - x(1/2) + 2x(2/3).$$

Ввиду формулы (1) отсюда следует, что g имеет 2 точки разрыва I рода $t_1 = 1/2$ со скачком в этой точке $h_1 = -1$, и $t_2 = 2/3$ со скачком $h_2 = 2$. При этом на интервалах непрерывности должно выполняться:

$$g'(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \le s \le \sqrt{2/3}, \\ 0, & \sqrt{2/3} < s \le 1 \end{cases}.$$

Поэтому на интервалах непрерывности, содержащихся в отрезке $[0;\sqrt{2/3}]$, функция g имеет вид $g(s) = s^2 + const$, а на содержащихся в отрезке $[\sqrt{2/3};1]$ – функция $g(s)$ постоянна. Учитывая, что функция g, согласно теореме, должна быть непрерывной слева на $[a;b]$ и удовлетворять условию: $g(a) = 0$, получим (рисунок 1):

$$g(s) = \begin{cases} s^2, & 0 \le s \le 1/2, \\ s^2 - 1, & 1/2 < s \le 2/3, \\ s^2 + 1, & 2/3 < s \le \sqrt{2/3}, \\ 5/3, & \sqrt{2/3} < s \le 1. \end{cases}$$

Так как $\overset{1}{\underset{0}{V}}[g] = \overset{1/2}{\underset{0}{V}}[g] + \overset{1}{\underset{1/2}{V}}[g] = |1/4 - 0| + |-1| + (5/3 - (-3/4)) = 11/3 < +\infty$, то $g \in V[0;1]$. Значит, f является линейным ограниченным функционалом, причем $\|f\| = \overset{1}{\underset{0}{V}}[g] = 11/3$.

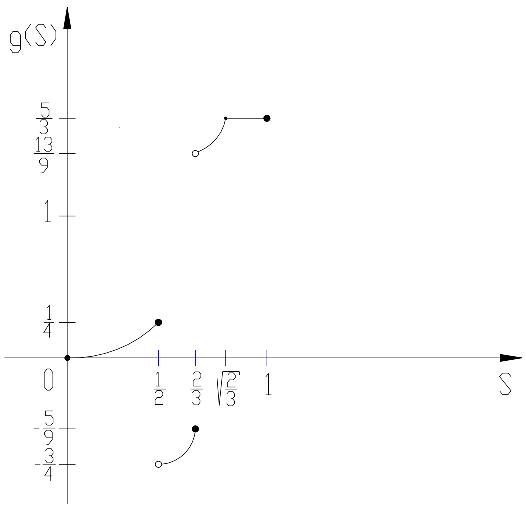

Рисунок 1 – График функции $g(s)$

2 Пусть $X \in Ban$. Задает ли данная формула линейный ограниченный функционал $f : X \to K$? В случае положительного ответа найти его норму.

Пример 1 $f : l_\infty \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(1) - x(2) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x(k)}{2^k}$.

Решение Очевидно, что функционал f − линейный. Оценим

$$|f(x)| \le |x(1)| + |x(2)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(k)|}{2^k} \le \sup_k |x(k)| \cdot \left(2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) = 3\|x\|_\infty, \qquad (2)$$

т. е. 3 является константой ограниченности для f. Значит, f − ограниченный линейный функционал, причем

$$\|f\| \le 3. \qquad (3)$$

Подберем ненулевой вектор $x_0 \in l_\infty$ так, чтобы неравенства (2) обратились в равенства. Подходит $x_0 = (1; -1; 1; 1; \ldots)$. Имеем $\|x_0\| = 1$, $|f(x_0)| = \left|2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}\right| = 3$. Следовательно,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| \ge |f(x_0)| = 3 \qquad (4)$$

Из (3) и (4) заключаем, что $\|f\| = 3$.

Пример 2 $f : l_1 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x(k)}{k^2 + 1}$.

Решение Очевидно, f − линейный функционал.

Так как
$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(k)|}{k^2+1} \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)| = \frac{1}{2}\|x\|_1,$$
то f ограничен, причем (см. пример 1)
$$\|f\| \le 1/2. \tag{5}$$
Возьмем $x_0 = (1;0;0;...) \in l_1$. Имеем $\|x_0\| = 1$, $f(x_0) = 1/2$. Значит (см. пример 1),
$$\|f\| \ge 1/2. \tag{6}$$
Из неравенств (5) и (6) получаем $\|f\| = 1/2$.

Пример 3 $f : C[0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(0) - 3x(1)$.

Решение Очевидно, f − линейный функционал. Так как
$$|f(x)| = |x(0) - 3x(1)| \le |x(0)| + 3|x(1)| \le 4\max_{0\le t\le 1}|x(t)| = 4\|x\|_{C[0;1]},$$
то f ограничен, причем (см. пример 1)
$$\|f\| \le 4. \tag{7}$$
Подберем теперь непрерывную функцию $x_0(t)$ так, чтобы выполнялись условия:
$$x(0) = 1, \quad x(1) = -1, \quad |x(t)| \le 1.$$
Например, $x_0(t) = 1 - 2t$. Для нее $\|x_0\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|1-2t| = 1$, $f(x_0) = 4$. Тогда имеем (см. пример 1)
$$\|f\| \ge 4. \tag{8}$$
Вследствие неравенств (7) и (8), получаем $\|f\| = 4$.

Тема 2
Спектр линейного непрерывного оператора

1.2.1 Найти спектр и резольвентное множество данного оператора A в пространстве $C[0;1]$ (таблица 1.2.1).

Таблица 1.2.1

Вариант	A	Вариант	A
1	$(Ax)(t) \equiv 0$	6	$(Ax)(t) = x(t)$
2	$(Ax)(t) = t \cdot x(0)$	7	$(Ax)(t) = t^2 \cdot x(1)$
3	$(Ax)(t) = t \cdot x(t)$	8	$(Ax)(t) = t \cdot (x(0) + x(1))$
4	$(Ax)(t) = t^2 \cdot (x(0) + x(1))$	9	$(Ax)(t) = (t+1) \cdot x(t)$
5	$(Ax)(t) = (3t+1) \cdot x(t)$	10	$(Ax)(t) = t \cdot x(0) - 4x(1)$

1.2.2 Найти собственные значения, точки непрерывного и точки остаточного спектров оператора A в пространстве $C[0;1]$, если $(Ax)(t) = a(t) \cdot x(t)$ (таблица 1.2.2).

Таблица 1.2.2

Вариант	$a(t)$	Вариант	$a(t)$
1	$2\left\lvert t - \frac{1}{2}\right\rvert - 2\left\lvert t - \frac{1}{3}\right\rvert$	6	$\lvert 2t-1\rvert - \lvert 2-2t\rvert$
2	$4\left\lvert t - \frac{1}{4}\right\rvert - 4\left\lvert t - \frac{2}{3}\right\rvert$	7	$\lvert 2t-1\rvert - \left\lvert \frac{1}{3} - 2t\right\rvert$
3	$\lvert 3t-1\rvert - \left\lvert 3t - \frac{1}{2}\right\rvert$	8	$\lvert 2t-1\rvert - \left\lvert 2t - \frac{1}{2}\right\rvert$
4	$5\lvert 2t-1\rvert - \left\lvert 10t - \frac{1}{3}\right\rvert$	9	$2\lvert t-1\rvert - \lvert 2-2t\rvert$
5	$\lvert 12t-1\rvert - \lvert 2-12t\rvert$	10	$\left\lvert 6t - \frac{1}{2}\right\rvert - 6\left\lvert t - \frac{1}{4}\right\rvert$

1.2.3 Найти спектр оператора A в пространстве l_2, если $(Ax)(k) = a(k) \cdot x(k)$ (таблица 1.2.3).

Таблица 1.2.3

Вариант	$a(k)$
1	$a(3k) = \dfrac{k^2+3k}{2k^2-1}, a(3k-1) = \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{2k}, a(3k-2) = \dfrac{\ln(k+1)}{k}$
2	$a(2k) = 2 + \dfrac{1}{k}, a(2k-1) = 3 - \dfrac{1}{k^2}$
3	$a(3k) = 1 + \dfrac{1}{2^k}, a(3k-1) = \dfrac{1}{k}, a(3k-2) = \dfrac{2k+1}{k}$
4	$a(2k) = 1 - \dfrac{1}{2^k}, a(4k-1) = \dfrac{1-k}{k}, a(4k-3) = 2 - \dfrac{1}{3^k}$
5	$a(4k-2) = \dfrac{3k^2+2}{k^2}, a(4k) = \dfrac{4k-1}{4k}, a(2k-1) = \dfrac{1-2k}{k}$
6	$a(3k) = \dfrac{2k+1}{2k+3}, a(3k-1) = \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{k}, a(3k-2) = \dfrac{1}{5^k}$
7	$a(3k) = \dfrac{k^2+k}{2k^2-1}, a(3k-1) = \left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^{k}, a(3k-2) = \dfrac{\ln(k+1)}{k}$
8	$a(4k-2) = \dfrac{3k^2+2}{k^2}, a(4k) = \dfrac{1}{4k}, a(2k-1) = \dfrac{1+2k}{k}$
9	$a(2k) = 5 - \dfrac{1}{k}, a(2k-1) = 3 + \dfrac{1}{k^2}$
10	$a(4k-2) = \dfrac{3k^2+1}{k^2}, a(4k) = \dfrac{12k-1}{6k}, a(2k-1) = \dfrac{1}{4^k}$

1.2.4 Выяснить, может ли множество $M \subset \mathbb{C}$ быть спектром некоторого линейного ограниченного оператора. В случае положительного ответа привести пример такого оператора (таблица 1.2.4).

Таблица 1.2.4

Вариант	M	Вариант	M
1	$\{0; 1; i\}$	6	$\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$
2	$\{\lambda \in \mathbb{C} : -1 \le \lambda \le 1\}$	7	$\left\{0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$
3	$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = it, 0 \le t \le 1\}$	8	$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lvert \operatorname{Im} \lambda \rvert \le 1\}$
4	$\{0; 21; 20\}$	9	$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lvert \lambda \rvert \le 4\}$
5	$\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots\right\}$	10	$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2it^2, 0 \le t \le 1\}$

Примеры решения типовых задач

1 Найти спектр и резольвентное множество данного оператора A в пространстве $C[0;1]$.

Пример 1 $(Ax)(t) = t^3 x(t)$.

Решение Найдем сначала точечный спектр оператора A. Рассмотрим уравнение с неизвестной функцией x из $C[0;1]$

$$(Ax)(t) = \lambda x(t), \tag{1}$$

$$(t^3 - \lambda) \cdot x(t) = 0, \ \forall t \in [0;1]. \tag{2}$$

Требуется найти те значения параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых это уравнение имеет ненулевое решение. Если допустить, что при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение (2) имеет ненулевое решение x, то $\exists t_0 \in [0;1]$: $x(t_0) \ne 0$, а тогда в силу непрерывности $x(t)$ найдется окрестность $O(t_0)$, в которой $x(t) \ne 0$. Значит, должно выполняться равенство $t^3 = \lambda, \forall t \in O(t_0)$. Поскольку это невозможно, то делаем вывод, что уравнение (2) не имеет ненулевых решений ни при каких λ. Таким образом, $\sigma_p(A) = \varnothing$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(A-\lambda I)x(t)=y(t), y\in C[0;1], \tag{3}$$

$$(t^3-\lambda)\cdot x(t)=y(t). \tag{4}$$

Резольвентное множество $\rho(A)$ состоит из тех значений λ, при которых оператор $A-\lambda I$ обратим. При таких значениях λ уравнение(4) имеет единственное непрерывное решение x для любого непрерывного y. Если $t\in[0;1]$, то $t^3\in[0;1]$. Если $\lambda\notin[0;1]$, то уравнение (4) однозначно разрешимо относительно $x(t)$ $\forall y\in C[0;1]$.А именно: $x(t)=y(t)/(t^3-\lambda)$. В этом случае $\lambda\in\rho(A)$. Если же $\lambda\in[0;1]$, то уравнение (4) непрерывно разрешимо не для всех $y\in C[0;1]$ (например, оно не имеет непрерывного решения при $y=1$, так как из равенства (4) следует, что $y(\sqrt[3]{\lambda})=0$). В этом случае $\lambda\in\sigma(A)$. Итак, $\rho(A)=C\setminus[0;1]$, $\sigma(A)=[0;1]$.

Пример 2 $(Ax)(t)=x(0)+t\cdot x(1)$.

Решение Рассмотрим уравнение $(Ax)(t)=\lambda x(t)$, т.е.

$$x(0)+t\cdot x(1)=\lambda x(t). \tag{5}$$

Если $\lambda=0$, то это уравнение имеет ненулевое решение (подходит любая непрерывная функция, для которой $x(0)=x(1)=0$, например функция $x(t)=t^2-t$). Значит, $0\in\sigma_p(A)$.

Если $\lambda\neq 0$, то из (5) следует, что его решение должно иметь вид $x(t)=kt+b$ (k и b – неопределенные коэффициенты).

Тогда $x(0)=b, x(1)=k+b$.

Подставив эти значения в (5), получим $b+t\cdot(k+b)=\lambda kt+\lambda b$, откуда

$$\begin{cases} b=\lambda b, \\ k+b=\lambda k. \end{cases}$$

Из первого равенства системы следует, что $\lambda=1$ или $b=0$. В случае $\lambda=1$ система имеет ненулевое решение (например $b=0, k=1$). А если $\lambda\neq 1$, то система, как легко проверить, имеет только нулевое решение. Итак, уравнение (5) имеет ненулевое решение лишь при $\lambda\in\{0;1\}$. Значит, $\sigma_p(A)=\{0;1\}$.

Для нахождения всего спектра будем рассуждать как в примере 1, то есть рассмотрим уравнение $(A-\lambda I)x(t)=y(t), y\in C[0;1], \lambda\notin\{0;1\}$, или

$$x(0)+t\cdot x(1)-\lambda x(t)=y(t). \tag{6}$$

Отсюда $\qquad x(t)=(x(0)+t\cdot x(1)-y(t))/\lambda$.

Подставив в (6) значение $t=0$, получим $x(0)=y(0)/(1-\lambda)$.

Полагая в (6) $t=1$, находим, что

$$x(1)=\frac{y(0)-x(0)}{1-\lambda}=\frac{y(0)}{1-\lambda}-\frac{y(0)}{(1-\lambda)^2}.$$

Значит, если $\lambda\notin\{0;1\}$ решение уравнения (6) имеет вид

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{y(0)}{1-\lambda}+t\cdot\left(\frac{y(0)}{1-\lambda}-\frac{y(0)}{(1-\lambda)^2}\right)-y(t)\right)\in C[0;1].$$

Таким образом, уравнение (6) однозначно разрешимо в $C[0;1]$ при $\lambda\notin\{0;1\}$ для любого y из $C[0;1]$. Итак, $\sigma(A)=\{0;1\}, \rho(A)=C\setminus\{0;1\}$.

2 Найти собственные значения, точки непрерывного и точки остаточного спектров оператора A в пространстве $C[0;1]$, если $(Ax)(t)=a(t)\cdot x(t)$.

Пример 1 $a(t)=|9t-2|-9\left|t-\frac{1}{2}\right|$.

Решение Преобразуем выражение, которым задана функция $a(t)=|9t-2|-9\left|t-\frac{1}{2}\right|$. Получим:

$$a(t)=\begin{cases}-5/2, & t\in[0;2/9],\\ 18t-13/2, & t\in[2/9;1/2],\\ 5/2, & t\in[1/2;1].\end{cases}$$

Отметим, что множество значений $E(a)$ этой функции есть отрезок [-5/2; 5/2] (рисунок 2). Рассмотрим уравнение $(Ax)(t)=\lambda x(t)$, то есть $a(t)x(t)=\lambda x(t)$, или

$$(a(t)-\lambda)\cdot x(t)=0. \tag{7}$$

Если $\lambda\notin[-5/2;5/2]$, то уравнение (7) имеет только нулевое решение. Если $\lambda=-5/2$, то $a(t)-\lambda=0$, $\forall t\in[0;2/9]$.

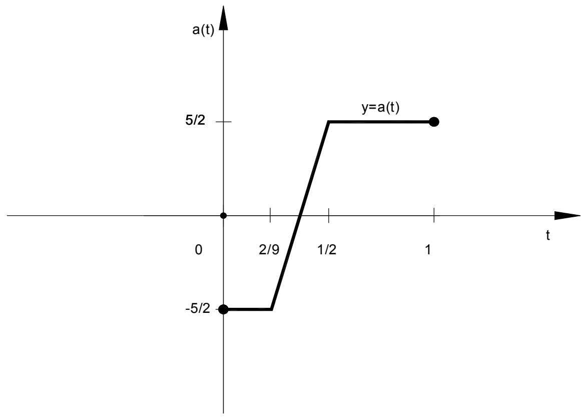

Рисунок 2 – График функции $a(t)$

Тогда уравнение (7) имеет ненулевое решение (например, изображенное графически на рисунке 3). Значит, $-5/2 \in \sigma_p(A)$. Рассуждая аналогично при $\lambda = 5/2$, получим, что $5/2 \in \sigma_p(A)$. Если $\lambda \in (-5/2; 5/2)$, то $x(t)$ должно быть равно нулю всюду, за исключением одной точки (в которой $a(t) = \lambda$). В силу непрерывности, $x(t) = 0$ всюду на отрезке $[0;1]$. Значит, точки интервала $(-5/2; 5/2)$ не принадлежат точечному спектру. Итак, $\sigma_p(A) = \{\pm 5/2\}$.

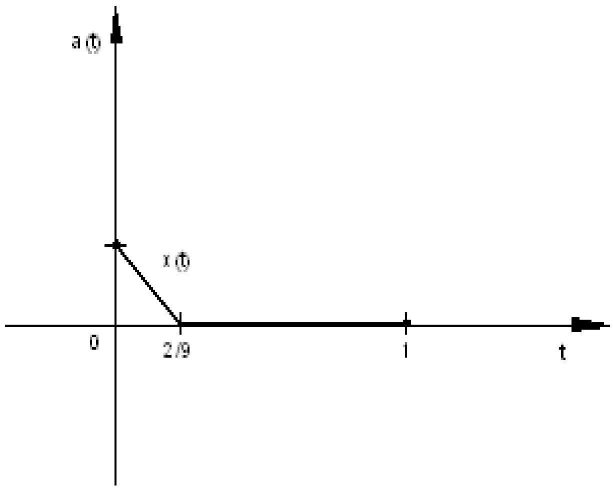

Рисунок 3 – График ненулевого решения уравнения (7)

Рассмотрим теперь уравнение

$(A - \lambda I)x(t) = y(t), y \in C[0;1]$, то есть

$$(a(t) - \lambda) \cdot x(t) = y(t). \qquad (8)$$

Если $\lambda \notin [-5/2; 5/2]$, то уравнение (8) имеет для любого y из $C[0;1]$ единственное непрерывное решение $x(t) = \dfrac{1}{a(t) - \lambda} y(t)$.

Значит, значения λ, не принадлежащие отрезку $[-5/2;5/2]$, являются регулярными. Рассмотрим число $\lambda \in (-5/2;5/2)$. Тогда $\exists t_0 \in [0;1]$, такое, что $\lambda - a(t_0) = 0$, и уравнение (8) разрешимо не для любого $y \in C[0;1]$ (почему?). Значит, $(-5/2;5/2) \subset \sigma(A)$.

Покажем, что все $\lambda \in (-5/2;5/2)$ принадлежат остаточному спектру. По определению образа оператора

$$(A-\lambda I)X = \{(a-\lambda)x \mid x \in C[0;1]\}.$$

Из того, что $\forall \lambda \in (-5/2;5/2)$ существует $t_0 \in [0;1]$ такое, что $\lambda - a(t_0) = 0$, следует, что при этих λ для любой функции $y \in (A-\lambda I)X$ выполняется условие $\rho_{C[0;1]}(y;1) := \max\limits_{t\in[0;1]} |y(t)-1| \geq 1$. Поэтому точка **1** не является предельной точкой для $(A-\lambda I)X$, а стало быть, замыкание $\overline{(A-\lambda I)X} \neq X$. Значит, $(-5/2;5/2) \subset \sigma_r(A)$, а непрерывный спектр оператора A − пустое множество. Итак,

$\sigma_p(A) = \{\pm 5/2\}, \sigma_c(A) = \varnothing, \sigma_r = (-5/2;5/2)$.

3 Найти спектр оператора $A: l_2 \to l_2$, $(Ax)(k) = a(k)x(k)$.

Пример 1 $a(3k) = \dfrac{9k-16}{6k}, a(3k-1) = \dfrac{1}{k^2}, a(3k-2) = \dfrac{1-3k}{3k+2}$.

Решение Запишем данный оператор в виде

$$Ax = (-\frac{2}{5}x(1), x(2), -\frac{7}{6}x(3), ..., a(3k-2)x(3k-2), a(3k-1)x(3k-1), a(3k)x(3k), ...).$$

Рассмотрим уравнение $Ax = \lambda x$. Оно равносильно бесконечной системе уравнений

$(a(k)-\lambda)x(k) = 0, k = 1,2,\ldots$.

Если $\lambda \in E(a) = \{-2/5, 1, -7/6, ..., a(3k-2), a(3k-1), a(3k), ...\}$, то эта система имеет ненулевое решение (например, вида e_k). При других λ система имеет только нулевое решение. Таким образом, $\sigma_p(A) = E(a)$. Так как спектр − замкнутое множество, то он содержит все свои предельные точки 3/2; 0; -1. Значит, он содержит и замыкание $\overline{E(a)} = \{3/2; 0; -1\} \cup E(a)$.

Предположим теперь, что $\lambda \notin \overline{E(a)}$, и рассмотрим уравнение $Ax - \lambda x = y$, т. е.

$$a(k)x(k) - \lambda x(k) = y(k). \tag{9}$$

Отсюда $x(k)=\dfrac{y(k)}{a(k)-\lambda}$. Выясним, принадлежит ли последовательность $(x(k))_{k=1}^{\infty}$ пространству l_2. Так как $\lambda\notin\overline{E(a)}$, то $\exists c>0:\left|a(k)-\lambda\right|\geq c,\forall k\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x(k)\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|y(k)\right|^2}{\left|a(k)-\lambda\right|^2}\leq\frac{1}{c^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left|y(k)\right|^2<\infty,\text{так как } y\in l_2.$$

Следовательно, если $\lambda\notin\overline{E(a)}$, то уравнение (9) однозначно разрешимо в l_2, $\forall y\in l_2$. Значит, в этом случае $\lambda\in\rho(A)$.

Итак,

$$\sigma(A)=\overline{E(a)}=\left\{-1;0;\frac{3}{2};\frac{1-3k}{3k+2};\frac{1}{k^2};\frac{9k-16}{6k},k\in\mathbb{N}\right\}.$$

4 Выяснить, может ли следующее множество $M\subset\mathbb{C}$ быть спектром некоторого линейного ограниченного оператора. В случае положительного ответа привести пример такого оператора.

Пример 1 $M=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\;\middle|\;\lambda=t+it^2,0\leq t\leq 1\right\}$.

Решение Множество M компактно (объясните, почему). Покажем, что оно может быть спектром линейного ограниченного оператора.

I способ Рассмотрим оператор $Ax(z)=zx(z)$ в пространстве $C(M)$, который, как легко проверить, линеен и ограничен (проверьте). Рассуждая как в примере 1 к задаче 2 (проведите подробное рассуждение), получаем, что $\sigma(A)=M$.

II способ Положим $S=\left\{\lambda\in M\right|\ \operatorname{Re}\lambda\in\mathbb{Q}\}$. Это множество счетное и плотное в M (почему?). Пусть $S=\left\{\lambda_n\mid n=1,2,\ldots\right\}$. Рассуждая как в примере 1 к задаче 3, получаем, что для линейного ограниченного оператора $Ax=(\lambda_1x(1);\lambda_2x(2);\lambda_3x(3);...)$

в пространстве l_2 (такой оператор называется *диагональным*) множество S будет точечным спектром, а весь спектр будет совпадать с M (проведите подробное рассуждение).

Тема 3
Компактные операторы

1.3.1 Выяснить, является ли данный оператор компактным в пространстве $C[0;1]$ (таблица 1.3.1).

Таблица 1.3.1

Вариант	A	Вариант	A
1	$(Ax)(t) = t^2 \cdot x(t)$	6	$(Ax)(t) = x(\sqrt[3]{t})$
2	$(Ax)(t) = (t^3 + 5)x(t)$	7	$(Ax)(t) = e^t \cdot x(\sqrt{t})$
3	$(Ax)(t) = x(t^2)$	8	$(Ax)(t) = (t+1)x(t)$
4	$(Ax)(t) = \sin t \cdot x(\sqrt{t})$	9	$(Ax)(t) = e^{2t} \cdot x(t)$
5	$(Ax)(t) = (t^2 + 3)x(t)$	10	$(Ax)(t) = 2x(\sqrt{t})$

1.3.2 Определить, является ли данный оператор компактным в пространстве $C[0;1]$ (таблица 1.3.2).

Таблица 1.3.2

Вариант	A
1	*2*
1	$(Ax)(t) = x(t) - \int\limits_0^1 t^2 s x(s) ds$
2	$(Ax)(t) = t^2 \cdot x(0)$
3	$(Ax)(t) = t^2 \cdot x(0) + t \cdot x(1)$
4	$(Ax)(t) = x(0) - t \cdot x(1)$
5	$(Ax)(t) = x\left(\frac{1}{3}\right) + x\left(\frac{1}{5}\right)\cos t - x\left(\frac{1}{7}\right)t$
6	$(Ax)(t) = x\left(\frac{1}{2}\right) + t^3 \cdot x(1)$

Продолжение таблицы 1.3.2

1	*2*
7	$(Ax)(t) = x(0) + 3tx(1)$
8	$(Ax)(t) = x\left(\frac{1}{4}\right) - x\left(\frac{1}{5}\right)\cos t + x\left(\frac{1}{8}\right)t$
9	$(\grave{A}x)(t) = 3x(t) + \int_0^1 s^2 tx(s)ds$
10	$(Ax)(t) = 2tx(0) - x(1)$

1.3.3 Исследовать оператор на компактность в пространстве $C[0;1]$ (таблица 1.3.3).

Таблица 1.3.3

Вариант	*A*	Вариант	*A*
1	$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$	6	$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{\lvert t-s \rvert} x(s)ds$
2	$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{t+s} x(s)ds$	7	$(Ax)(t) = \int_0^1 \lvert t-s \rvert x(s)ds$
3	$(Ax)(t) = \int_0^1 \lvert t+s \rvert \cdot x(s)ds$	8	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds$
4	$(Ax)(t) = \int_0^1 \sin(t+s)x(s)ds$	9	$(Ax)(t) = \int_0^1 (t+s) \cdot x(s)ds$
5	$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 t^3 sx(s)ds$	10	$(Ax)(t) = \int_0^1 \lvert 2t+s \rvert \cdot x(s)ds$

1.3.4 Выяснить, является ли оператор $A: X \to Y$ компактным (таблица 1.3.4).

Таблица 1.3.4

Вариант	X	Y	A
1	$C^{(2)}[0;1]$	$C^{(1)}[0;1]$	$(Ax)(t) = x'(t)$
2	$C^{(2)}[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t) = x'(t)$
3	$C^{(2)}[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t) = x''(t)$
4	$L_1[0;1]$	l_1	$Ax = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, ...\right)$
5	$C[0;1]$	l_2	$Ax = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt; ...\right)$
6	$C[0;1]$	l_2	$Ax = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1} x(t)dt, ...\right)$
7	$C^{(2)}[0;1]$	$C^{(1)}[0;1]$	$(\grave{A}x)(t) = x(t)$
8	$L_1[0;1]$	l_1	$Ax = \left(\frac{1}{4}\int_0^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{4^k}\int_0^1 t^k x(t)dt, ...\right)$
9	$C[0;1]$	l_2	$Ax = \left(\frac{1}{5}\int_0^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{5^k}\int_0^1 t^k x(t)dt; ...\right)$
10	$L_1[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(\grave{A}x)(t) = x(t)$

Примеры решения типовых задач

1 Выяснить, являются ли следующие операторы компактными в пространстве $C[0;1]$.

Пример 1 $(Ax)(t) = t^{3/2} x(\sqrt{t})$.

Решение Докажем, что данный оператор не является компактным. Возьмем множество $M = \left\{ t^n : n \in \mathbb{N} \right\}$. Оно ограничено в $C[0;1]$. Но множество $A(M) = \left\{ t^{(n+3)/2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ не является предкомпактным в $C[0;1]$, так как из последовательности $\left\{ t^{(n+3)/2} \right\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ нельзя извлечь сходящуюся в $C[0;1]$ подпоследовательность ,так как эта подпоследовательность будет иметь разрывный предел. В соответствии с определением компактного оператора, данный оператор не компактен.

Пример 2 $(Ax)(t) = \int\limits_0^{0,5} (t^2 + 1)x(s)ds + e^t \cdot x(1/2)$.

Решение Представим данный оператор в виде $A = A_1 + A_2$, где

$A_1 x = \int\limits_0^{0,5} (t^2 + 1)x(s)ds$, $A_2 x = e^t \cdot x(1/2)$,

и докажем, что операторы A_1 и A_2 компактны. Оператор A_1 компактен как интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром. Компактность оператора A_2 следует из того, что он является ограниченным оператором конечного ранга. Действительно,

$\forall x \in C[0;1]$ $\|A_2 x\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} \left| e^t \cdot x(1/2) \right| \le e\|x\|$,

а размерность $\dim\big(A_2(C[0;1])\big) = \dim\big(\left\{ e^t \cdot x(1/2) \right\}\big) = 1$, поскольку все функции $e^t \cdot x(1/2)$ линейно выражаются через функцию e^t.Тогда оператор A компактен как сумма компактных операторов.

2 Выяснить, является ли оператор $A : C[0;1] \to l_1$ компактным.

Пример 1 $Ax = \left(\int\limits_0^1 e^{-(t+1)} x(t)dt, \int\limits_0^1 e^{-2(t+1)} x(t)dt, \int\limits_0^1 e^{-3(t+1)} x(t)dt, \ldots \right)$.

Решение Докажем, что оператор A является компактным. Рассмотрим следующую последовательность линейных операторов $A_n : C[0;1] \to l_1$ конечного ранга:

$$A_n x = \left(\int\limits_0^1 e^{-(t+1)} x(t)dt, \int\limits_0^1 e^{-2(t+1)} x(t)dt, \ldots, \int\limits_0^1 e^{-n(t+1)} x(t)dt, 0, 0, \ldots \right).$$

Эти операторы ограничены. Действительно, $\forall x$

$$\|Ax\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 e^{-n(t+1)}x(t)dt\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n}\cdot\int_0^1 e^{-nt}\cdot|x(t)|dt) \le \|x\|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n} \quad .$$

Следовательно, они компактны. Теперь компактность *A* следует из того, что последовательность (A_n) сходится к *A* по норме, так как

$$\|(A-A_n)x\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\int_0^1 e^{-k(t+1)}x(t)dt\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}e^{-k}\|x\|,$$

а потому $\|A-A_n\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}e^{-k} \to 0\ (n\to\infty)$.

3 Выяснить, является ли оператор $A: C^{(1)}[0;1] \to C[0;1]$ компактным.

Пример 1 $(Ax)(t) = x(t)$.

Решение Возьмем в $C^{(1)}[0;1]$ произвольное ограниченное множество *M*. Это означает, что $\exists c>0: \forall x\in M\ \ \|x\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)| \le c$.

Отсюда следует, что $\forall x\in M\ \ \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|\le c$ и $\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|\le c$. Рассмотрим теперь множество $A(M) = \{x(t)\ \mid x\in M\} \subset C[0;1]$. Оно равномерно ограничено, так как $\|x\|_{C[0;1]} \le c$. Кроме того, $A(M)$ − равностепенно непрерывно, так как по теореме Лагранжа $\forall t_1, t_2 \in [0;1]$

$$|x(t_1)-x(t_2)| = |x'(\xi)|\cdot|t_1-t_2| \le c\cdot|t_1-t_2|.$$

Предкомпактность множества $A(M)$ доказана. Значит,оператор *A* компактен.

Пример 2 $(Ax)(t) = x'(t)$.

Решение Возьмем ограниченное в $C^{(1)}[0;1]$ множество

$$M = \left\{\frac{t^{n+1}}{n+1} \mid n\in \mathbb{N}\right\}.$$

Множество $A(M) = \left\{ t^n \middle| n\in\mathbb{N} \right\}$ не является предкомпактным в $C[0;1]$, так как из любой подпоследовательности последовательности $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя извлечь сходящуюся в $C[0;1]$ подпоследовательность (почему?). Значит, данный оператор не компактен.

2 Гильбертовы пространства и интегральные уравнения

Тема 1
Гильбертовы пространства. Основные понятия.

2.1.1 Пусть L − заданное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Проверить аксиомы скалярного произведения для функции $\omega : L \times L \to \mathbb{C}$ (таблица 2.1.1).

Таблица 2.1.1

Вариант	L	$\omega(x,y)$
1	l_2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x(n)\overline{y(n)}$
2	$C[a;b]$	$\int_a^b e^{-t} x(t)\overline{y(t)}dt$
3	l_∞	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x(n)\overline{y(n)}$
4	c	$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} x(n)\overline{y(n)}$
5	c_0	$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} x(n)\overline{y(n)}$
6	$C^{(1)}[a;b]$	$\int_a^b (x(t)\overline{y(t)} + x'(t)\overline{y'(t)})dt$
7	$C[0;1]$	$\int_0^1 t^{-1/2} x(t)\overline{y(t)}dt$
8	l_2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x(n)\overline{y(n)}$
9	c	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} x(n)\overline{y(n)}$
10	$C[0;1]$	$\int_0^1 t^{-1/3} x(t)\overline{y(t)}dt$

2.1.2 В гильбертовом пространстве H найти проекцию вектора x_0 на заданное подпространство L (таблица 2.1.2).

Таблица 2.1.2

Вариант	H	x_0	L
1	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{2^k}$	$\left\{\alpha x+\beta y \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R},\, x(k)=\dfrac{1}{7^k},\, y(k)=\dfrac{1}{8^k}\right\}$
2	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{3^k}$	$\left\{\alpha x+\beta y \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R},\, x(k)=\dfrac{1}{5^k},\, y(k)=\dfrac{1}{6^k}\right\}$
3	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{k}$	$\{\alpha x_1+\beta x_2 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R},\, x_1=(1,1,0,0,0,\ldots),$ $\ldots.x_2=(1,0,0,0,\ldots)\}$
4	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{3^k}$	$\{\alpha x_1+\beta x_2 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R},\, x_1=(1,0,1,0,0,\ldots),$ $\ldots.x_2=(1,1,1,0,0,\ldots)\}$
5	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{2^k}$	$\{\alpha x_1+\beta x_2 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R},\, x_1=(1,1/2,1/4,\ldots),$ $\ldots.x_2=(1,0,1,0,0,\ldots)\}$
6	l_2	$x_0(k)=\dfrac{1}{k^2}$	$\left\{\alpha x+\beta y \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R},\, x=(1,1,1,),\, y(k)=\dfrac{1}{k}\right\}$
7	$L_2[0;1]$	$x_0(k)=\cos t$	$\{\alpha t^2+\beta t \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$
8	$L_2[-1;1]$	$x_0(k)=\sin t$	$\left\{x \mid x(t)=x(-t),\, \int_0^1 x(t)dt=0\right\}$
9	$L_2[-1;1]$	$x_0(k)=1+t^2$	$\left\{x \mid \int_0^1 x(t)dt=\int_{-1}^1 x(t)t^2dt=0\right\}$
10	$L_2[-2;2]$	$x_0(k)=e^t$	$\left\{x \mid x(t)=-x(-t),\, \int_{-1}^1 x(t)dt=0\right\}$

2.1.3 Доказать, что в указанном нормированном пространстве X со стандартной нормой нельзя ввести скалярное произведение, порождающее эту норму (таблица 2.1.3).

Таблица 2.1.3

Вариант	X	Вариант	X
1	$C^{(1)}[0;1]$	6	l_3
2	l_1	7	$L_3[0;1]$
3	$C[0;1]$	8	c_0
4	l_∞	9	c
5	$L_1[0;1]$	10	$L_5[0;1]$

2.1.4 Вычислить угол между данными векторами x, y: а) в пространстве H_1, б) в пространстве H_2 (пространства считать вещественными) (таблица 2.1.4).

Таблица 2.1.4

Вариант	x	y	H_1	H_2
1	$\sin 3t$	$\cos 5t$	$L_2[-\pi;\ \pi]$	$L_2[0;3]$
2	t	t^2	$L_2[0;1]$	$L_2[0;3]$
3	e^{-t}	e^{-2t}	$L_2[-1;1]$	$L_2[0;3]$
4	$\sin \pi t$	$\sin t$	$L_2[0;1]$	$L_2[0;3]$
5	t	$\cos t$	$L_2[0;1]$	$L_2[0;3]$
6	$\sin \pi t$	$\cos \pi t$	$L_2[-1;\ 1]$	$L_2[0;3]$
7	t	t^2	$L_2[0;1]$	$L_2[-1;\ 1]$
8	1	t^2	$L_2[-1;\ 1]$	$L_2[0;1]$
9	$\sin 4t$	$\cos 3t$	$L_2[0;\ \pi]$	$L_2[-\pi;\ \pi]$
10	$\sin 2\pi t$	$\cos t$	$L_2[0;\ 1]$	$L_2[0;\ \pi]$

2.1.5 Проверьте, что система векторов (φ_n) является ортогональным базисом пространства H (здесь мы полагаем $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$, $f_n = (\ldots 0,0,1,0,0,\ldots)$, где единица стоит на n-ном месте) (таблица 2.1.5).

Таблица 2.1.5

Вариант	φ_n	H	$<x,y>$
1	$f_n, n \in \mathbb{Z}$	$l_2(\mathbb{Z}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,\middle|\, \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lvert x(n)\rvert^2 < \infty \right\}$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\overline{y(n)}$
2	$e_n, n \in \mathbb{N}$	c_0	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-3/2} x(n)\overline{y(n)}$
3	$e_n, n \in \mathbb{N}$	c	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n} x(n)\overline{y(n)}$
4	$e_n, n \in \mathbb{N}$	l_∞	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x(n)\overline{y(n)}$
5	$e_n, n \in \mathbb{N}$	l_2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}$
6	$f_n, n \in \mathbb{Z}$	$l_2(\mathbb{Z}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,\middle|\, \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lvert x(n)\rvert^2 < \infty \right\}$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n} x(n)\overline{y(n)}$
7	$\sin \pi n t, n \in \mathbb{N}$	$L_2[0;1]$	$\int\limits_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$
8	$\cos \pi n t, n \in \mathbb{N}$	$L_2[0;1]$	$\int\limits_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$
9	$\sin \pi n t, n \in \mathbb{N}$	$L_2[0;\pi]$	$\int\limits_0^\pi x(t)\overline{y(t)}dt$
10	$\cos \pi n t, n \in \mathbb{N}$	$L_2[0;\pi]$	$\int\limits_0^\pi x(t)\overline{y(t)}dt$

2.1.6 Для данного подмножества M гильбертова пространства H найти ортогональное дополнение $M^{\perp}$ (таблица 2.1.6).

Таблица 2.1.6

Вариант	H	M
1	$L_2[-1;1]$	$\{x \mid x(t)=0 \text{ при } t<0\}$
2	$L_2[0;+\infty)$	$\{x \mid x(t)=0 \text{ при } t>1\}$
3	$L_2[-1;1]$	$\left\{x \,\middle\vert\, \int_{-1}^{1} x(t)dt=0\right\}$
4	$L_2[-\pi;\pi]$	$\left\{x \,\middle\vert\, \int_{-\pi}^{0} x(t)\sin t dt=0\right\}$
5	$L_2[0;1]$	$\left\{x \,\middle\vert\, \int_{0}^{1} x(t)\cdot t dt=0\right\}$
6	$L_2[-1;1]$	$\left\{x \,\middle\vert\, \int_{0}^{1} x(t)\sqrt{t} dt=0\right\}$
7	$L_2[1;+\infty)$	$\{x \mid x(t)=0 \text{ при } t>2\}$
8	$L_2[-1;1]$	$\{x \mid x(t)=0 \text{ при } t>0\}$
9	$L_2[0;1]$	$\left\{x \,\middle\vert\, \int_{0}^{1} x(t)\sqrt{t} dt=0\right\}$
10	$L_2[-\pi;\pi]$	$\left\{x \,\middle\vert\, \int_{-\pi}^{0} x(t) t dt=0\right\}$

Примеры решения типовых задач

1 Доказать, что данная функция $\omega: L\times L \to \mathbb{C}$ задает скалярное произведение в L ($L-$ линейное пространство над полем $\mathbb{C}$).

Пример 1 $L = l_2(\mathbb{Z}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum\limits_{n\in Z} |x(n)|^2 < \infty\right\}, \omega(x,y) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\overline{y(n)}$.

Решение Далее положим для краткости $\omega(x,y)=\langle x,y\rangle$. Функция $<x,y>$ определена для любых $x,y\in l_2(\square)$ в силу неравенства

$$\left|x(n)\cdot\overline{y(n)}\right|\le\frac{1}{2}\left(\ |x(n)|^2+|y(n)|^2\right).$$

Остальные аксиомы скалярного произведения легко проверяются. Например, при проверке второй аксиомы имеем:

$$\overline{<y,x>}=\overline{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(n)\cdot\overline{x(n)}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot\overline{y(n)}=<x,y>.$$

Следовательно, данная функция задает скалярное произведение в пространстве $l_2(\square)$.

2 В гильбертовом пространстве H найти проекцию вектора x_0 на заданное подпространство L.

Пример 1

$L=\{\alpha x_1+\beta x_2\mid\alpha,\beta\in\square,x_1=(0;1;1;0;0...),x_2=(1/2;1/4;1/8;...)\}$,

$x_0=(1;0;1/2;0;...;1/2^k;0;...),\ H=l_2$.

Решение По определению проекции, требуется найти такой вектор $y_0=\alpha_0x_1+\beta_0x_2$, что $<y_0-x_0,l>=0,\forall l\in L$, то есть

$<y_0-x_0,\alpha x_1+\beta x_2>=0,\forall\alpha,\beta\in\square$.

Ясно, что это условие может выполняться для любых $\alpha,\beta\in\square$ в том, и только в том случае, если

$$\begin{cases}<y_0-x_0,x_1>=0,\\<y_0-x_0,x_2>=0.\end{cases}$$

Преобразуем эту систему.

$$\begin{cases}<\alpha_0x_1+\beta_0x_2-x_0,x_1>=0\\<\alpha_0x_1+\beta_0x_2-x_0,x_2>=0\end{cases},\ \begin{cases}\alpha_0<x_1,x_1>+\beta_0<x_2,x_1>-<x_0,x_1>=0\\\alpha_0<x_1,x_2>+\beta_0<x_2,x_2>-<x_0,x_2>=0\end{cases},$$

$$\begin{cases}\alpha_0\cdot2+\beta_0\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2},\\\alpha_0\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\beta_0\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}.\end{cases}$$

Решая систему, получим $\alpha_0=-\frac{64}{707},\beta_0=\frac{1284}{707}$.

Тогда проекция вектора x_0 на подпространство L есть вектор

$$y_0 = -\frac{64}{707}(0;1;1;0;0;...) + \frac{1284}{707}(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};...) = \left(\frac{642}{707};\frac{257}{707};...\right)$$

3 Доказать, что в указанном нормированном пространстве X со стандартной нормой нельзя ввести скалярное произведение, порождающее эту норму.

Пример 1 $X = C^{(2)}[0;1]$.

Решение Допустим противное, то есть что в $C^{(2)}[0;1]$ можно ввести скалярное произведение, порождающее стандартную норму. Тогда (как в любом предгильбертовом пространстве) должно выполняться равенство параллелограмма:

$$\forall x, y \quad \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right). \qquad (1)$$

Но если $x(t) = t, y(t) = 1-t$, то легко подсчитать, что

$\|x\| = \sum_{k=0}^{2} \max_{0 \le t \le 1} |x^{(k)}(t)| = 1$, $\|y\| = 2$, $\|x+y\| = 1$, $\|x-y\| = \|2t-1\| = 3$.

Подстановка этих данных в (1) приводит к противоречию.

4 Вычислить угол между векторами x, y в пространстве H над $\mathbb{C}$.

Пример 1 $H_1 = L_2[-1;1]$, $x = t$, $y = 1$.

Решение По определению угла между ненулевыми векторами *x* и *y*,

$\cos\varphi = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$, $\varphi \in [0;\pi]$.

Поскольку в нашем случае

$< x, y > = \int_{-1}^{1} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \int_{-1}^{1} t dt = 0$,

то $\cos\varphi = 0$, а тогда искомый угол равен $\pi/2$.

5 Проверьте, что система векторов $(f_n), n \in \mathbb{N}$ является ортогональным базисом пространства H, если $f_n = (...0;0;1;0;0;...)$ (единица стоит на *n*-ном месте).

Пример 1 $H = l_2(\mathbb{Z})$, $< x, y > = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2+1)^{-3/2} x(n)\overline{y(n)}$.

Решение Легко проверить, что $< f_n, f_m >= 0$ для любых $n \neq m$.

Система (f_n) обладает свойством максимальности. Действительно, возьмем $\forall x \in H$ и допустим, что $< x, f_n >= 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Тогда $(n^2+1)^{-3/2} \cdot x(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Отсюда $x(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, т. е. $x = 0$.

Итак, система (f_n) максимальна. Значит, $(f_n)_{n \in Z}$ − ортогональный базис (здесь используется характеризация базиса в гильбертовом пространстве, справедливая не только для нормированных систем).

6 Для данного подмножества M гильбертова пространства H найти ортогональное дополнение $M^{\perp}$.

Пример 1 $H = L_2[0;1]$, $M = \left\{ x \in H \middle| \, x(t) = 0 \text{ при } t > 1/2 \right\}$.

Решение Заметим, что любую функцию $x \in H$ можно представить в виде $x = x \cdot \chi_{[0;1/2]} + x \cdot \chi_{[1/2;1]}$, причем

$$x_1 := x \cdot \chi_{[0;1/2]} \in M, \; x_2 := x \cdot \chi_{[1/2;1]} \in M^{\perp}.$$

Пусть теперь $x \in M^{\perp}$. Тогда $x \perp M$, а так как $x_1 \in M$, то $x \perp x_1$. Значит, скалярное произведение $< x, x_1 > = \int\limits_0^{1/2} |x(t)|^2 dt = 0$ откуда следует, что $x(t) = 0$ почти всюду на $[0;1/2]$.

Обратно, если $x(t) = 0$ почти всюду на $[0;1/2]$, то $x \perp M$, то есть $x \in M^{\perp}$. Значит,

$$M^{\perp} = \left\{ x \in H \middle| \, x(t) = 0 \text{ почти всюду при } t \in [0;1/2] \right\}.$$

Пример 2 $H = L_2(\mathbb{R})$, $M = \left\{ x \in H \middle| \, \int\limits_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-t} dt = 0 \right\}$.

Решение Положим $a(t) = e^{-t} \cdot \chi_{[0;+\infty)}(t)$. Тогда $M = \left\{ x \in H \middle| < x, a >= 0 \right\}$. Пусть $N = \{ c \cdot a(t) | \, c \in \mathbb{R} \} = c \cdot a$ − одномерное подпространство, порожденное функцией a. Тогда $M = \left\{ x \middle| \, x \perp y \quad \forall y \in N \right\} = N^{\perp}$. Следовательно, $M^{\perp} = (N^{\perp})^{\perp} = N$, то есть $M^{\perp} = \{ c \cdot a(t) | \, c \in \mathbb{R} \}$.

Тема 2
Сопряженные операторы

2.2.1 Найти сопряженный к оператору A в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$ (таблица 2.2.1).

Таблица 2.2.1

Вариант	$(Ax)(t)$	Вариант	$(Ax)(t)$
1	$\int_{t^2}^{t} e^t sx(s)ds$	6	$\int_{t^2}^{\sqrt{t}} ts^3 x(s)ds$
2	$\int_{0}^{\sin t} t^2 s^2 x(s)ds$	7	$\int_{0}^{t^2} ts^2 x(s)ds$
3	$\int_{t^2}^{1} t^3 sx(s)ds$	8	$\int_{t^4}^{t^2} t^3 s^2 x(s)ds$
4	$\int_{0}^{\sin t} ts^2 x(s)ds$	9	$\int_{0}^{t^2} t^3 s^2 x(s)ds$
5	$\int_{t^2}^{\sqrt{t}} ts^4 x(s)ds$	10	$\int_{t^2}^{t} e^{3t} sx(s)ds$

2.2.2 Найти сопряженный к оператору A в пространстве $L_2[0;1]$ (таблица 2.2.2).

Таблица 2.2.2

Вариант	$(Ax)(t)$	Вариант	$(Ax)(t)$
1	$\alpha \sin t \cdot x(t)$	6	$e^{\alpha\pi t} t \cdot x(t)$
2	$\alpha i t \cdot x(t)$	7	$\alpha t^2 \cdot x(t)$
3	$e^{\alpha i t} \cdot x(t)$	8	$e^{\alpha} \cdot \sqrt{t} x(t)$
4	$\sin(\alpha t) \cdot x(t)$	9	$\cos(\alpha t) \cdot x(t)$
5	$e^{t\alpha} \cdot x(\sqrt[3]{t})$	10	$e^{\alpha\pi i} t \cdot x(t)$

2.2.3 Найти сопряженный к оператору A в гильбертовом пространстве l_2 с весом p, где $p(k) = 1/2^k$ (таблица 2.2.3).

Таблица 2.2.3

Вариант	Ax
1	$(0; x(2); x(1); x(3); \ldots; x(k); \ldots)$
2	$\left(\dfrac{x(1)}{3}; \dfrac{x(2)}{3^2}; 0; 0; \dfrac{x(3)}{3^3}; \dfrac{x(4)}{3^4}; \ldots\right)$
3	$(x(3); x(2); 0, x(4); x(5); \ldots; x(k); \ldots)$
4	$(x(1) - 2x(3); x(1) + x(5); 0; 0; 0; \ldots)$
5	$(x(2); x(3); \ldots; x(n); 0; 0; 0; \ldots)$
6	$(x(2) - 4x(4); 0; x(7) - x(1); 0; 0; 0; \ldots)$
7	$(0; ix(1); x(2); ix(3); x(4); ix(5); \ldots)$
8	$(x(1); 0; x(3); 0, x(5); 0; \ldots)$
9	$(x(4) + 2x(3); x(7) - x(5); 0; 0; 0; \ldots)$
10	$\left(0; x(1); \dfrac{x(2)}{2}; \dfrac{x(3)}{3}; \ldots; \dfrac{x(k)}{k}; \ldots\right)$

2.2.4 Если это возможно, привести пример самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве, точечный спектр которого совпадает с данным множеством $S \subset \mathbb{C}$ (таблица 2.2.4).

Таблица 2.2.4

Вариант	S	Вариант	S
1	$\{1/n : n = 1,2,\ldots\}$	6	$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lvert\lambda\rvert = 1\}$
2	$\{0; i\}$	7	$\{in : n = 1,2,\ldots\}$
3	$\{2^{-n} : n = 1,2,\ldots\}$	8	$\{e^{i\varphi} : 0 \le \varphi \le \pi\}$
4	$\{\sin(in) : n = 1,2,\ldots\}$	9	$\{i/n : n = 1,2,\ldots\}$
5	$\{0; i; -i\}$	10	$\{\cos(in) : n = 1,2,\ldots\}$

Примеры решения типовых задач

1 Найти сопряженный к оператору A в гильбертовом пространстве $L_2[0;1]$.

Пример 1 $(Ax)(t) = \int_{t^3}^{\sqrt[5]{t}} i \sin t \cdot s^2 x(s) ds$.

Решение можно получить, если воспользоваться тем фактом, что A^* тоже является интегральным оператором, причем для ядер операторов A^* и A выполняется соотношение

$$K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}. \quad (1)$$

В следующем примере также будет использоваться этот подход.

Пример 2 $(Ax)(t) = \int_{t}^{1-t} t^2 s x(s) ds$.

Решение Воспользуемся тем, что

$$(A^* y)(t) = \int_a^b K^*(t,s) y(s) ds = \int_a^b \overline{K(s,t)} y(s) ds.$$

В данном случае $K(t,s) = t^2 s$, если s находится между t и $1-t$, и $K(t,s) = 0$ в остальных случаях. В силу (1), должно выполняться $K^*(t,s) = s^2 t$, если t находится между s и $1-s$, и $K^*(t,s) = 0$ в остальных случаях. Возможны 2 случая.

1) $0 \le s \le 1/2$. Тогда $s \le 1-s$.

В этом случае утверждение «t находится между s и $1-s$» равносильно неравенству $s \le t \le 1-s$, т. е. тому, что $s \le t$ и $s \le 1-t$.

Отсюда $0 \le s \le \min\{1/2; t; 1-t\} = \min\{t; 1-t\}$ (объясните последнее равенство).

2) $1/2 \le s \le 1$. Тогда $1-s \le s$.

В этом случае утверждение «t находится между s и $1-s$» равносильно неравенству $1-s \le t \le s$, т. е. тому, что $t \le s$ и $1-t \le s$.

Отсюда $\max\{t; 1-t\} \le s \le 1$ (мы воспользовались тем, что $\max\{t; 1-t\} \ge 1/2$).

Поэтому $(A^* y)(t) = \int_0^1 K^*(t,s) y(s) ds = \int_0^{1/2} K^*(t,s) y(s) ds +$

$$+ \int_{1/2}^1 K^*(t,s) y(s) ds = \int_0^{\min\{t;1-t\}} s^2 t \cdot y(s) ds + \int_{\max\{t;1-t\}}^1 s^2 t \cdot y(s) ds.$$

2 Найти сопряженный к оператору A в гильбертовом пространстве l_2 с весом p, где $p(k) = 1/2^k$.

Пример 1 $Ax = (ix_2, x_1 - ix_3, i^3 x_3, 0, 0, ...)$.

Решение В данном пространстве скалярное произведение задается следующим образом:

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \overline{y_k} \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Тогда $< Ax, y >= ix_2 \overline{y_1} \cdot \frac{1}{2} + (x_1 - ix_3)\overline{y_2} \cdot \frac{1}{2^2} + (-ix_3)\overline{y_3} \cdot \frac{1}{2^3} =$

$$= x_1 \cdot \overline{\frac{y_2}{2}} \cdot \frac{1}{2} + x_2 \cdot \overline{(-i) \cdot 2y_1} \cdot \frac{1}{2^2} + x_3 \cdot \overline{(2iy_2 + iy_3)} \cdot \frac{1}{2^3} + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0 + \ldots.$$

Поскольку полученное выражение должно равняться $< x, A^* y >$, то

$$A^* y = \left(\frac{y_2}{2}, -2iy_1, i \cdot (2y_2 + y_3), 0, 0, ... \right).$$

3 Если это возможно, приведите пример самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве, точечный спектр которого совпадает с данным множеством $S \subset$ □ .

Пример 1 $S = \{0; 1; 2; 3\}$.

Решение Рассмотрим оператор $Ax = (x(1), 2x(2), 3x(3), 0)$ в пространстве □ ^{4}. Несложно проверить, что он является самосопряженным, и точечный спектр его совпадает с данным множеством S.

Пример 2 $S = \{\lambda = t + it^2 : t \in [0;1]\}$.

Ответ: Данное множество не может быть точечным спектром самосопряженного оператора.

Указание. Необходимо воспользоваться свойством спектра самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Тема 3
Интегральные уравнения

Будем рассматривать интегральное уравнение

$$x(t) = \mu\int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) \qquad (1)$$

2**.3.1** Решить уравнение (1) при $\mu = 1$, если (таблица 2.3.1):

Таблица 2.3.1

Вариант	a	b	$K(t,s)$	$f(t)$
1	0	π	$\frac{2}{\pi}\cos(s+t)$	$1+\sin t$
2	0	π	$\sin s + s\cos t$	$1-\frac{2}{\pi}t$
3	0	π	$\cos(t+s)$	$\sin t$
4	-1	1	$3t - s^2t^2$	t^2+t^4
5	0	1	$5st$	$3t+2$
6	0	1	e^{t+s}	1
7	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{\pi}\cos(3s+t)$	$\sin 3t$
8	0	2	$5t - s^3t^2$	$3t-5$
9	0	2	e^{t-s}	5
10	0	$\frac{\pi}{2}$	$t\sin s - s\cos t$	$8+\sin t$

2.3.2 Не решая уравнения (1), определите, при каких $f \in L_2[a;b]$ оно имеет решение в пространстве $L_2[a;b]$ (в этой задаче мы полагаем $\mu = 1$) (таблица 2.3.2).

Таблица 2.3.2

Вариант	a	b	$K(t,s)$
1	0	2π	$\sin(t-2s)$
2	-1	1	$st+s^2t^2$
3	0	1	$2st-4t^2$
4	0	$\pi/2$	$4\sin^2 t$
5	-2	2	$i\lvert t\rvert/4$
6	$-\pi$	π	se^{it}
7	0	2π	$\dfrac{2i}{\pi}\sin(t+2s)$
8	-1	1	$st+is^4t^2$
9	-2	2	$s(t+is^4)$
10	0	2π	$\sin t\cos t$

2**.3.3** Определить, при каких значениях параметра $\mu \in \mathbb{C}$ уравнение (1) разрешимо в пространстве $C[a;b]$ при любой функции f из $C[a;b]$ (таблица 2.3.3)?

Таблица 2.3.3

Вариант	a	b	$K(t,s)$
1	-2	2	$\lvert t\rvert$
2	0	$\pi/2$	$\sin t\cos s$
3	-1	1	t^2-2ts
4	-1	1	s^2+ts
5	-1	1	$2s^3+t^3$
6	0	2π	$e^{i(t-s)}$
7	0	2	t^2-5ts^3
8	0	π	$\sin t+\cos s$
9	-3	3	$9s^4+4t^3$
10	0	π	$e^{2i(t+s)}$

Примеры решения типовых задач

1 Решить уравнение (1) при $\mu = 1$.

Пример 1 $a = 0, b = \pi, K(t,s) = \sin(t - 2s), f(t) = \cos 2t$.

Решение Нам нужно решить уравнение

$x(t) = \int\limits_0^{\pi} \sin(t - 2s) x(s) ds + \cos 2t$, то есть

$$x(t) = \sin t \int\limits_0^{\pi} \cos 2s \cdot x(s) ds - \cos t \int\limits_0^{\pi} \sin 2s \cdot x(s) ds + \cos 2t. \qquad (2)$$

Введем бозначения:

$$\begin{cases} a = \int\limits_0^{\pi} \cos 2s \cdot x(s) ds, \\ b = \int\limits_0^{\pi} \sin 2s \cdot x(s) ds. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда из (2) заключаем, что решение данного уравнения имеет вид

$$x(t) = a \sin t - b \cos t + \cos 2t \qquad (4)$$

с неопределенными коэффициентами *a* и *b*. Для нахождения *a* и *b* подставим выражение (4) в систему (3):

$$\begin{cases} a = \int\limits_0^{\pi} \cos 2s (a \sin s - b \cos s + \cos 2s) ds \\ b = \int\limits_0^{\pi} \sin 2s (a \sin s - b \cos s + \cos 2s) ds \end{cases},$$

$$\begin{cases} a = a \int\limits_0^{\pi} \cos 2s \sin s ds - b \int\limits_0^{\pi} \cos 2s \cos s ds + \int\limits_0^{\pi} \cos^2 2s ds \\ b = a \int\limits_0^{\pi} \sin 2s \sin s ds - b \int\limits_0^{\pi} \sin 2s \cos s ds + \int\limits_0^{\pi} \sin 2s \cos 2s ds \end{cases},$$

или после вычисления интегралов в правых частях:

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{3} a + \frac{\pi}{2}, \\ b = -\frac{4}{3} b. \end{cases}$$

Отсюда $a = \frac{3\pi}{10}, b = 0$. Подставляя эти значения в (4), окончательно получаем $x(t) = \frac{3\pi}{10} \sin t + \cos 2t$.

2 Не решая уравнения (1), определите, при каких $f \in L_2[a;b]$ оно имеет решение в пространстве $L_2[a;b]$ (здесь мы полагаем $\mu = 1$).

Пример 1 $a = 0, b = \pi, K(t,s) = \frac{2}{\pi}\cos(t+s)$.

Решение Рассматривается уравнение

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t+s)x(s)ds + f(t). \tag{5}$$

В соответствии с теоремой Фредгольма, данное уравнение разрешимо для тех и только тех f, которые ортогональны любому решению сопряженного однородного уравнения.

Составим сопряженное однородное уравнение:

$u(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(s+t)u(s)ds$ или

$u(t) = \frac{2}{\pi}\cos t\int_0^{\pi}\cos su(s)ds - \frac{2}{\pi}\sin t\int_0^{\pi}\sin su(s)ds$.

Введем обозначения

$$\begin{cases} a = \int_0^{\pi}\cos s \cdot u(s)ds, \\ b = \int_0^{\pi}\sin s \cdot u(s)ds. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда решение сопряженного однородного уравнения принимает вид

$$u(t) = \frac{2}{\pi}a\cos t - \frac{2}{\pi}b\sin t. \tag{7}$$

Подставив (7) в (6), получим систему

$$\begin{cases} a = \int_0^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}a\cos s - \frac{2}{\pi}b\sin s\right)\cos sds, \\ b = \int_0^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}a\cos s - \frac{2}{\pi}b\sin s\right)\sin sds, \end{cases}$$

или после вычисления интегралов, $\begin{cases} a = a, \\ b = -b. \end{cases}$

Отсюда $b = 0$, a − произвольная постоянная. Значит, решение сопряженного однородного уравнения имеет вид: $u(t) = \frac{2}{\pi}a\cos t$, то есть

$u(t) = A\cos t$, $A = const$.

Итак, данное уравнение разрешимо для тех и только тех $f \in L_2[0;\,1]$, для которых $\int\limits_0^\pi f(t)\cos t dt = 0$.

3 При каких значениях параметра $\mu \in \mathbb{R}$ уравнение (1) разрешимо в пространстве $C[a;b]$ при любой функции f из $C[a;b]$?

Пример 1 $a = 0, b = \pi, K(t,s) = \cos(t+s)$.

Решение Рассматривается уравнение

$$x(t) = \mu\int\limits_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds + f(t).$$

В соответствии с теоремой Фредгольма, данное уравнение разрешимо при любой функции $f \in C[0;\pi]$ тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение.

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$u(t) = \mu\int\limits_0^\pi \cos(t+s)u(s)ds \;;$$

$$u(t) = \mu\cos t\int\limits_0^\pi \cos s u(s)ds - \mu\sin t\int\limits_0^\pi \sin s u(s)ds.$$

Введем обозначения $\begin{cases} a = \int\limits_0^\pi \cos s \cdot u(s)ds, \\ b = \int\limits_0^\pi \sin s \cdot u(s)ds. \end{cases}$ (8)

Тогда $u(t) = a\mu\cos t - b\mu\sin t$. (9)

Подставив (9) в (8), получим

$$\begin{cases} a = \int\limits_0^\pi \cos s\left(a\mu\cos s - b\mu\sin s\right)ds, \\ b = \int\limits_0^\pi \sin s\left(a\mu\cos s - b\mu\sin s\right)ds. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} a = \dfrac{a\mu\pi}{2}, \\ b = -\dfrac{b\mu\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(1 - \dfrac{\mu\pi}{2}\right) = 0, \\ b\left(1 + \dfrac{\mu\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

Последняя система (а с ней и соответствующее однородное уравнение) имеет только нулевое решение лишь при $1-\frac{\mu\pi}{2}\neq 0$ и $1+\frac{\mu\pi}{2}\neq 0$. Значит, данное уравнение разрешимо в пространстве $C[0;\pi]$ при любой функции f тогда и только тогда, когда $\mu\notin\left\{\frac{2}{\pi};-\frac{2}{\pi}\right\}$.

Литература

1 Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. − Мн.: БГУ, 2003. − 430 с.

2 Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. − М.: Наука, 1972. – 496 с.

3 Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лабораторный практикум / А.Б. Антоневич [и др.]. − Мн.: БГУ, 2003. − 179 с.

4 Миротин, А. Р. . Функциональный анализ. В 3-х частях. Ч. 1. Мера и интеграл / А. Р. Миротин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. – 152 с.

5 Кириллов, А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. − М.: Наука, 1979. – 381 с.